Mathematisches Institut der Universität München, WISE 2019/20

Übungen zur Mathe III für Physiker

Prof.Dr.P.Pickl

Blatt 8

Aufgabe 1: Es sei $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f_1(x,y) = y^2 - x^2$ und $z = x + iy$.
Finden Sie eine Funktion $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := f_1(x,y) + if_2(x,y)$ holomorph ist!

Aufgabe 2: Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \exp z$ wobei $\exp z$ über die Reihe definiert ist.

(a) Sei $\epsilon \in (0,\pi)$, $a \in \mathbb{R}$. Zeichnen Sie das Bild $f(Q)$ für

$$Q := \{x + iy \mid a - \epsilon \leq x \leq a + \epsilon,\ -\epsilon \leq y \leq \epsilon\}\,.$$

(b) Berechnen Sie das Verhältnis der Flächen $\lim_{\epsilon \to 0} \frac{|f(Q)|}{|Q|}$! Warum war dieses Ergebnis zu erwarten?

Aufgabe 3:

Es sei $f(z) = 1/z\,,\ z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

1. Auf welche Kurven bildet f Kreise mit Mittelpunkt im Nullpunkt ab, und auf welche bildet sie Nullpunktsgeraden ab?
2. Wie verändert sich der Winkel zwischen zwei Nullpunktsgeraden? Wie verändert sich der Winkel zwischen zwei beliebigen Geraden?

Aufgabe 4:

1. Zeigen Sie den Gaußschen Mittelwertsatz: Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Dann gilt für alle $r \geq 0$:
$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + re^{i\varphi})d\varphi\,.$$
2. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz mit $|f(z)| \leq C|z|^\alpha$ für alle $|z| \geq R$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$ und $C, R > 0$. Zeigen Sie: f ist ein Polynom höchstens $\lfloor\alpha\rfloor$-ten Grades. (Die Gaußklammer $\lfloor\alpha\rfloor$ von α bezeichnet die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich α ist.)